TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 03

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

La medida de Lebesgue se define mediante un proceso de extensión, partiendo de que la medida de un intervalo es su longitud. Se define la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ acercándonos a ese conjunto mediante uniones numerables de intervalos abiertos que contienen al conjunto. No vamos a definir una medida interior, como lo hizo Lebesgue, ya que la caracterización que hizo Carathéodory de los conjuntos medibles es más cómoda de trabajar y requiere únicamente contar con una medida exterior

Definición 1. *Diremos que una colección finita o infinita numerable de intervalos abiertos finitos $I_1, I_2, \ldots$ es una cubierta del conjunto A si $A \subset \bigcup_n I_n$.*

El resultado siguiente, cuya demostración es muy simple gracias al teorema de Heine-Borel, es fundamental para demostrar que la medida de Lebesgue de un intervalo es igual a su longitud. De esta forma, lo que obtendremos será una extensión del concepto de longitud a todos los conjuntos medibles.

Lema 1. *Sea I un intervalo finito de cualquier tipo (i.e. abierto, semiabierto, etc.) e $I_1, I_2, \ldots$ una cubierta de I, entonces:*

$l(I) \leq \sum_j l(I_j)$

Demostración

Sean a y b los extremos del intervalo I y, dada $\varepsilon > 0$, sean I_a e I_b intervalos abiertos que contengan a a y b respectivamente y tales que $l(I_a) = l(I_b) = \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces los intervalos $I_a, I_b, I_1, I_2, \ldots$ forman una cubierta del intervalo $[a, b]$. Por el teorema de Heine-Borel, existe entonces una subcubierta finita. Sea L la suma de las longitudes de los intervalos de dicha cubierta finita, entonces:

$$l(I) = b - a \leq L \leq \sum_j l(I_j) + \varepsilon$$

Se tiene entonces que $l(I) \leq \sum_j l(I_j) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, de lo cual se sigue el resultado.

■

Definición 2. *Se define la medida exterior, $m_e(A)$, de un conjunto A, mediante la relación:*

$m_e(A) = \text{ínf}\left\{\sum_j l(I_j) : I_1, I_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$

Proposición 1. *Si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces:*

$m_e(A) \leq m_e(B)$

Proposición 2. *La medida exterior de un intervalo es igual a su longitud.*

Demostración

Consideremos primero un intervalo finito I. Por el lema 1 se tiene $l(I) \leq m_e(I)$.

Dada $\varepsilon > 0$ sea J un intervalo abierto tal que $J \supset I$ y $l(J) < l(I) + \varepsilon$. Como $J \supset I$, J es cubierta de I, así que se tiene:

$$m_e(I) \leq l(J) < l(I) + \varepsilon$$

Es decir, $m_e(I) < l(I) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $m_e(I) \leq l(I)$.

Si el intervalo I es infinito, dado cualquier $\alpha > 0$ existe un intervalo finito J contenido en I y de longitud α. Por lo tanto, $m_e(I) \geq m_e(J) = l(J) = \alpha$. Así que $m_e(I) = \infty$.

■

Ahora viene la propiedad que caracteriza a una medida exterior.

Proposición 3. *Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de conjuntos, entonces:*

$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n)$

Demostración

Si $m_e(A_n) = \infty$ para alguna n el resultado es trivial.

Supongamos entonces que $m_e(A_n) < \infty$ para toda n. Dada $\varepsilon > 0$, para cada conjunto A_n sea $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots$ una cubierta de A_n tal que $\sum_m l(I_{n,m}) < m_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. La familia de intervalos $I_{n,m}$ forman una cubierta de $\bigcup_n A_n$, así que:

$$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_m l(I_{n,m}) \leq \sum_n \left[m_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] \leq \sum_n m_e(A_n) + \varepsilon$$

Es decir, $m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n) + \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por lo tanto:

$$m_e\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n m_e(A_n)$$

■

Definición 3. *La propiedad enunciada en la última proposición es llamada la propiedad de σ-subaditividad de la medida exterior.*

Como decíamos, seguimos ahora el método de Carathéodory para definir la medibilidad de un conjunto.

Definición 4. *Se dice que un conjunto E es Lebesgue medible si:*

$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$

para cualquier conjunto A. Además, en ese caso, se define la medida de E, $m(E)$, como la medida exterior de E.

Obsérvese que, por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene:

$$m_e(A) \leq m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

para cualquier par de conjuntos E y A, de manera que para demostrar la medibilidad de un conjunto E únicamente es necesario probar la otra desigualdad; es decir:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Comentario 1

Lebesgue (1902) desarrolló su teoría de la medida para conjuntos acotados y definió no sólo la medida exterior de cualquier subconjunto acotado de números reales, sino también su medida interior:

Si E es un conjunto acotado, entonces está contenido en un intervalo $[a, b]$. Definió la medida interior de E, denotada por $m_i(E)$, mediante la siguiente relación:

$$m_i(E) = l([a, b]) - m_e([a, b] - E)$$

Los conjuntos medibles los definió entonces como aquellos conjuntos E para los cuales $m_i(E) = m_e(E)$.

Años más tarde, en 1914, Constantin Carathéodory expresó la condición de medibilidad de un conjunto sin introducir el concepto de medida interior. Definió los conjuntos medibles como aquellos conjuntos E para los cuales, cualquiera que sea el subconjunto A de números reales, se cumpla la siguiente relación:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

Obsérvese que, de acuerdo con la definición de Lebesgue, para que un conjunto acotado sea medible se requiere que si $[a, b]$ es un intervalo que contiene a E, entonces:

$$l([a, b]) - m_e([a, b] - E) = m_i(E) = m_e(E)$$

Así que la condición de medibilidad de E puede darse de la siguiente forma:

$$l([a, b]) = m_e(E) + m_e([a, b] - E) = m_e([a, b] \cap E) + m_e([a, b] \cap E^c)$$

De manera que, si se cumple la condición de medibilidad de Carathéodory, entonces se cumple la condición de medibilidad de Lebesgue.

La condición de medibilidad de Lebesgue es, en principio, más débil que la de Carathéodory; sin embargo, como la de Lebesgue se cumple para los intervalos, se puede deducir que se cumple para cualquier conjunto acotado ya que la medida exterior de un conjunto A está definida mediante cubiertas de A formadas por intervalos. Esto se muestra a continuación, utilizando que la familia de conjuntos Lebesgue medibles contenidos en un intervalo acotado K forma un álgebra de subconjuntos de K que contiene a todos los subintervalos de K y que la función m, definida sobre esa álgebra, es finitamente aditiva , lo cual demostró Lebesgue.

Sea E un conjunto acotado medible, A un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado cualquiera y (a, b) un intervalo tal que $A \cup E \subset (a, b)$.

Si $I_1, I_2, \ldots$ es una colección finita o infinita numerable de intervalos abiertos tales que $A \subset U_n I_n$, definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = I_n \cap (a, b)$. Eliminemos los conjunto J_n que sean igual al vacío y reenumeremos los restantes; obtenemos entonces una colección $J_1, J_2, \ldots$ de intervalos abiertos tales que $A \subset U_n J_n$.

Además, como E es medible, se tiene que:

$$l([a, b]) = m_e(E) + m_e([a, b] - E) = m_e([a, b] \cap E) + m_e([a, b] \cap E^c)$$

$$= m_e([a, b] \cap E^c) + m_e([a, b] \cap E) = m_e([a, b] \cap E^c) + m_e\left([a, b] \cap ([a, b] \cap E^c)^c\right)$$

Así que $[a, b] \cap E^c$ es Lebesgue medible.

Por lo tanto, los conjuntos $J_1 \cap E, J_2 \cap E, \ldots$, así como como los conjuntos $J_1 \cap E^c, J_2 \cap E^c, \ldots$, son Lebesgue medibles.

Tenemos entonces:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(\bigcup_n (J_n \cap E)) + m_e(\bigcup_n (J_n \cap E^c))$

$\leq \sum_n m_e (J_n \cap E) + \sum_n m_e (J_n \cap E^c) = \sum_n m (J_n \cap E) + \sum_n m (J_n \cap E^c)$

$= \sum_n [m (J_n \cap E) + m (J_n \cap E^c)] = \sum_n m (J_n) = \sum_n l(J_n) \leq \sum_n l(I_n)$

Así que:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \text{ínf} \{\sum_n l(J_n) : I_1, I_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\} = m_e(A)$

Por lo tanto, E satisface la condición de medibilidad de Carathéodory.

Comentario 2

Una manera informal de visualizar los conjuntos medibles consiste en verlos como aquellos conjuntos E cuya medida exterior mide exactamente lo que está dentro del conjunto; es decir, no mide algo más grande que lo que está dentro de él; esto es lo que estaría diciendo la definición $m(E) = m_e(E)$ para los conjuntos medibles.

Geométricamente, la condición de medibilidad de Carathéodory ($m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$ para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$) podríamos verla de la siguiente manera:

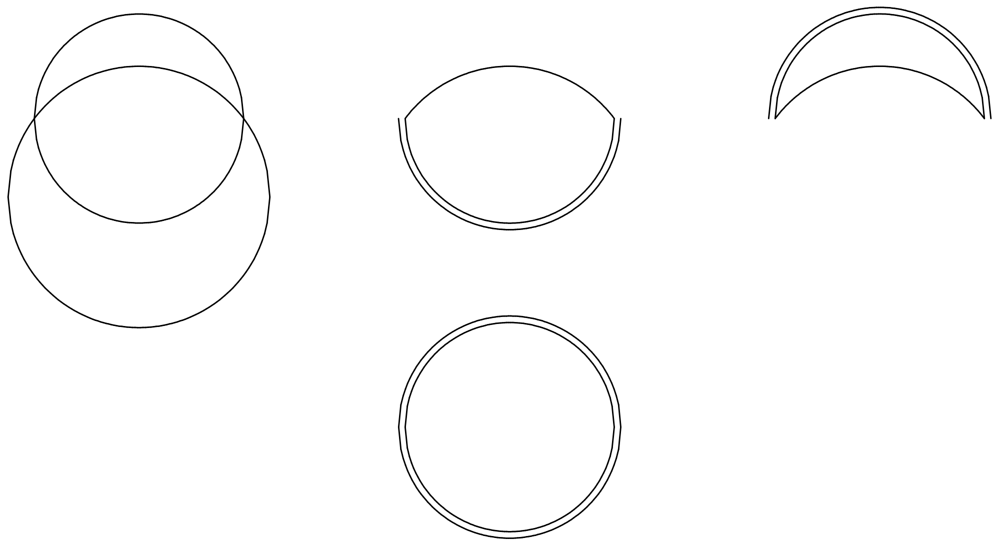
En las siguientes figuras, el círculo grande es un conjunto medible E y el chico es un subconjunto A de $\mathbb{R}$.

La primera muestra los conjuntos E y A.

La segunda muestra el conjunto $A \cap E$, así como lo que podría ser su medida exterior. Al evaluarla, la parte que corresponde a E no se pasa del conjunto, mientras que la que corresponde a A abarca un poco más que el conjunto.

De la misma manera, la tercera muestra el conjunto $A \cap E^c$, así como lo que podría ser su medida exterior. Al evaluarla, la parte que corresponde a E^c no se pasa del conjunto, mientras que la que corresponde a A abarca un poco más que el conjunto.

La cuarta figura muestra la unión de las dos anteriores, la cual corresponde a la medida exterior de A.



Continuando con la exposición, ahora se trata de demostrar que la familia de conjuntos medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y que la función que asigna a cada conjunto medible su medida es σ-aditiva. Comenzamos demostrando primero que forma un álgebra y que la función medida es finitamente aditiva.

Proposición 4. *La familia de conjuntos Lebesgue medibles forma un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*.*

Demostración

Que $\mathbb{R}$ es medible, así como que el complemento de un conjunto medible es medible, son resultados obvios.

Sean E_1 y E_2 dos conjuntos medibles y A cualquier conjunto. Se tiene entonces:

$m_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)\right) + m_e\left(A \cap (E_1 \cup E_2)^c\right)$

$= m_e\left((A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)\right) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$\leq m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c \cap E_2) + m_e\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right)$

$= m_e(A \cap E_1) + m_e(A \cap E_1^c) = m_e(A)$

Así que, $E_1 \cup E_2$ es medible.

∎

Proposición 5. *Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cualquier colección finita de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas, entonces:*

$$m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j)$$

para cualquier conjunto A.

Demostración

Para $n = 1$ la igualdad es obvia.

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $n = k$ y sea $E_1, E_2, \ldots, E_{k+1}$ una colección finita de $k + 1$ conjuntos medibles, ajenos por parejas, entonces, como E_{k+1} es Lebesgue medible, se tiene:

$$m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j)\right) = m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}\right) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k+1} E_j) \cap E_{k+1}^c\right)$$

$$= m_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} E_j)\right)$$

$$= m_e\left(A \cap E_{k+1}\right) + \sum_{j=1}^{k} m_e(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{k+1} m_e(A \cap E_j)$$

$\blacksquare$

Corolario 1. *La función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible E su medida, $m(E)$, es una función finitamente aditiva.*

Proposición 6. *La familia de conjuntos Lebesgue medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas. Como la familia de conjuntos Lebesgue medibles forma un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ es Lebesgue medible, así que, utilizando la proposición 5 y la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene, para cualquier conjunto A:

$$m_e(A) = m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)\right) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c\right)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} m_e(A \cap E_j) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$$

Tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, se obtiene:

$m_e(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_e(A \cap E_j) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

$\geq m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)\right) + m_e\left(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c\right)$

Por lo tanto, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ es Lebesgue medible.

■

Proposición 7. *La función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible E su medida, $m(E)$, es una función σ-aditiva.*

Demostración

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una colección infinita numerable de conjuntos Lebesgue medibles, ajenos por parejas. Por la σ-subaditividad de la medida exterior, se tiene $m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$. Por otra parte, por la aditividad finita de la función que asigna a cada conjunto Lebesgue medible su medida, se tiene, para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq m(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} m(E_j)$$

Así que, tomando límite cuando $n \rightsquigarrow \infty$, setiene:

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

■

El resultado siguiente, cuya demostración es muy simple, es importante ya que hace ver que la familia de conjuntos medibles no está formada únicamente por los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. Es la parte que la faltó considerar a Borel cuando desarrollo su teoría de la medida, ya que quedándonos únicamente con la medida de los borelianos, la medida no resulta ser una generalización del contenido de Jordan. La familia de conjuntos Jordan-medibles (aquellos cuyo contenido interior coincide con su contenido exterior) contiene a todos los conjuntos de contenido cero; por ejemplo, el conjunto de Cantor es Jordan-medible ya que su contenido es cero; por lo tanto, todo subconjunto del conjunto de Cantor es Jordan-medible. Como el conjunto de Cantor tiene la misma cardinalidad que el conjunto de números reales, resulta enconces que la cardinalidad de la familia de conjuntos que son Jordan-medibles coincide con la cardinalidad de la familia formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. La familia de los conjuntos borelianos, en cambio, tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$.

Proposición 8. *Todo conjunto de medida exterior cero es Lebesgue medible.*

Demostración

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida exterior cero. Entonces, para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$, se tiene:

$$m_e(A \cap E) = 0$$

Además, como $A \cap E^c \subset A$, se tiene:

$$m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Por lo tanto:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$

Así que E es medible.

$\blacksquare$

Proposición 9. *Todo conjunto boreliano es Lebesgue medible.*

Demostración

Como la familia de conjuntos Lebesgue medibles forma una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, es suficiente con probar que los intervalos de la forma $[a, \infty)$ son Lebesgue medibles, ya que éstos generan la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$.

Sea E un intervalo de la forma $[a, \infty)$, A cualquier conjunto e $I_1, I_2, \ldots$ una cubierta de A, entonces, para cada I_n, los conjuntos $I_n \cap E$ e $I_n \cap E^c$ son intervalos o el conjunto vacío y se tiene:

$m_e(A \cap E) \leq m_e\left(\left(\bigcup_n I_n\right) \cap E\right) = m_e\left(\bigcup_n (I_n \cap E)\right)$

$\leq \sum_n m_e(I_n \cap E) = \sum_{\{n \in \mathbb{N}: I_n \cap E \neq \emptyset\}} l(I_n \cap E)$

$m_e(A \cap E^c) \leq m_e\left(\left(\bigcup_n I_n\right) \cap E^c\right) = m_e\left(\bigcup_n (I_n \cap E^c)\right)$

$\leq \sum_n m_e(I_n \cap E^c) = \sum_{\{n \in \mathbb{N}: I_n \cap E^c \neq \emptyset\}} l(I_n \cap E^c)$

Así que:

$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq \sum_{\{n \in \mathbb{N}: I_n \cap E \neq \emptyset\}} l(I_n \cap E) + \sum_{\{n \in \mathbb{N}: I_n \cap E^c \neq \emptyset\}} l(I_n \cap E^c) \leq \sum_{\{n \in \mathbb{N}\}} l(I_n)$

Finalmente, como lo anterior es válido para cualquier cubierta de A, se puede concluir que:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

$\blacksquare$

El resultado siguiente muestra que la familia de los conjuntos medibles, si bien es más grande que la familia de los conjuntos borelianos, está formada por los conjuntos que difieren de un boreliano únicamente por un conjunto de medida cero. Es decir, no hay algún conjunto medible que no se obtenga de un boreliano, agregándole un conjunto de medida cero.

Proposición 10. *Dado cualquier conjunto Lebesgue medible E existe un boreliano B y un conjunto C de medida cero tales que $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.*

Demostración

Consideremos primero el caso de un conjunto Lebesgue medible E contenido en un intervalo finito (a, b) y definamos $F = (a, b) - E$.

La idea es cubrir F con un boreliano A tal que $m(A - F) = 0$, después de lo cual nos acercamos a E por dentro mediante $(a, b) - A$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $I_1, I_2, \ldots$ una cubierta de F tal que:

$$\sum_j l(I_j) < m(F) + \varepsilon$$

$A^{(\varepsilon)} = \bigcup_j I_j$ es entonces un boreliano tal que:

$$m(A^{(\varepsilon)} - F) = m(A^{(\varepsilon)}) - m(F) \leq \sum_j l(I_j) - m(F) < \varepsilon$$

Es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe un boreliano $A^{(\varepsilon)}$ tal que $A^{(\varepsilon)} \supset F$ y $m(A^{(\varepsilon)} - F) < \varepsilon$.

Sea entonces $\left(A^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de borelianos que contengan a F y tales que:

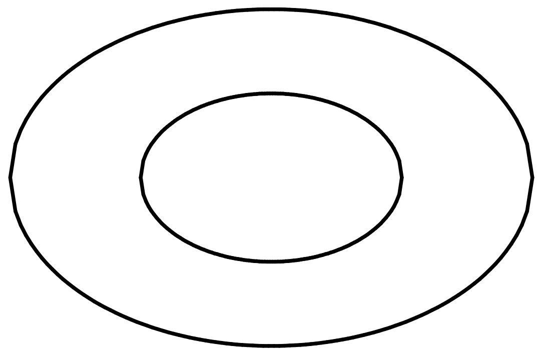
$$m(A^{(n)} - F) < \frac{1}{n}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Se tiene entonces $m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)} - F\right) \leq m(A^{(n)} - F) < \frac{1}{n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

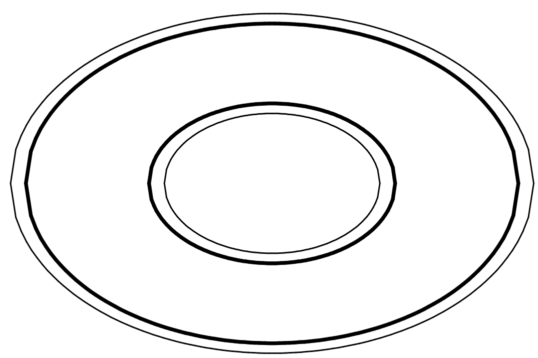
$$m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)} - F\right) = 0$$

Por lo tanto, $A = (a, b) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A^{(j)} \right)$ es un boreliano tal que $A \supset F$ y $m(A - F) = 0$.



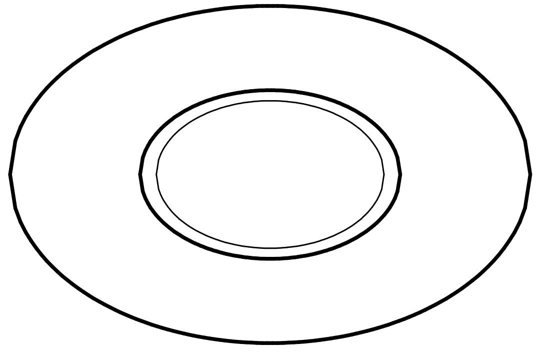
E conjunto medible contenido en G $((a, b))$

$F = G - E$



A boreliano, $A \supset F$, $m(A - F) = 0$

Definamos $B = (a, b) - A$, así que B es boreliano.



B boreliano, $B \subset E$

$$E \cap A^c = B$$

$$E \cap A = A - F$$

Así que:

$$E = (E \cap A^c) \cup (E \cap A) = B \cup (A - F)$$

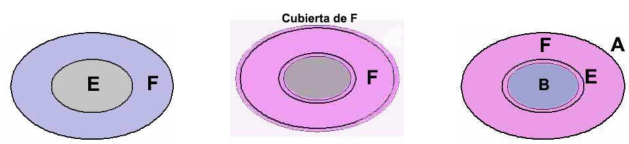
$$B \cap (A - F) = \emptyset$$

Definiendo $C = A - F$, se tiene $E = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ y $m(C) = 0$.

Tomemos ahora un conjunto Lebesgue medible E arbitrario y, para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $E_k = E \cap (-k, k)$.

Sea B_k un boreliano y C_k un conjunto de medida cero tales que $E_k = B_k \cup C_k$ y $B_k \cap C_k = \emptyset$, entonces tomando $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ y $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, se tiene que B es boreliano, D tiene medida cero y $E = B \cup D$.

Finalmente, definamos $C = D - B$, entonces C tiene medida cero y se tiene $E = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.



■

Como corolario, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1. *La σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles es la σ-álgebra generada por los intervalos y los conjuntos de medida exterior cero.*

Obsérvese que la familia de los conjuntos de medida exterior cero coindice con la familia de los conjuntos de medida cero de acuerdo con la definición de Borel: **Un conjunto tiene medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o infinito numerable de intervalos abiertos, cuya unión contiene al conjunto dado, y tales que la suma de sus longitudes es menor que ε.**

Así que el teorema anterior podemos enunciarlo de la siguiente manera:

Teorema 2. *La σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles es la σ-álgebra generada por los intervalos y los conjuntos de medida cero.*

Los resultados anteriores pueden condensarse en el siguiente:

Teorema 3. *Existe una función m definida sobre la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por los intervalos y los conjuntos de medida cero, la cual tiene las siguientes propiedades:*

a) $m(\emptyset) = 0$

b) $m(I) = \ell(I)$ *para cualquier intervalo* I.

c) Si $E_1, E_2, \ldots$ *es una colección infinita numerable de elementos de* $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$*, ajenos por parejas, entonces:*

$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$

Denotaremos por $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ a la σ-álgebra formada por los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}$ y por λ a la medida m, a la cual llamaremos la medida de Lebesgue sobre $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$.

También se tienen los siguientes resultados:

Proposición 11. *Todo conjunto de medida exterior cero está contenido en un conjunto boreliano de medida exterior cero.*

Demostración

Sea A un conjunto de medida exterior cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_1^n, I_2^n \ldots$ una colección finita o infinita numerable de intervalos abiertos tales que $A \subset \bigcup_{k=1} I_k^n$ y $\sum_{k=1} l(I_k^n) < \frac{1}{n}$. Definamos $B_n = \bigcup_{k=1} I_k^n$ y $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, tiene medida exterior cero y $A \subset B$.

∎

Proposición 12. *La medida exterior es invariante bajo traslaciones.*

Demostración

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

Si $I_1, I_2, \ldots$ es una cubierta de A, entonces $I_1 + b, I_2 + b, \ldots$ constituye una cubierta de $A + b$. Así que:

$m_e(A) = \text{ínf}\left\{\sum_j l(I_j) : I_1, I_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\} = \text{ínf}\left\{\sum_j l(I_j + b) : I_1, I_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\}$

$\geq \text{ínf}\left\{\sum_j l(K_j) : K_1, K_2, \ldots \text{ es cubierta de } A + b\right\} = m_e(A + b)$

Si $K_1, K_2, \ldots$ es una cubierta de $A + b$, entonces $K_1 - b, K_2 - b, \ldots$constituye una cubierta de A. Así que:

$$m_e(A{+}b) = \text{ínf}\left\{\sum_j l(K_j) : K_1, K_2, \ldots \text{ es cubierta de } A + b\right\} = \text{ínf}\left\{\sum_j l(K_j - b) : K_1, K_2, \ldots \text{ es cubierta}\right.$$

$$\geq \text{ínf}\left\{\sum_j l(I_j) : I_1, I_2, \ldots \text{ es cubierta de } A\right\} = m_e(A)$$

Por lo tanto, $m_e(A + b) = m_e(A)$.

$\blacksquare$

Proposición 13. *La medida de Lebesgue λ es invariante bajo traslaciones.*

Demostración

Sea $E \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces, como E es medible, se tiene:

$$m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c) \leq m_e(A)$$

Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Así que también se tiene:

$$m_e((A - b) \cap E) + m_e((A - b) \cap E^c) \leq m_e(A - b)$$

Por la proposición anterior, se tiene:

$m_e((A - b) \cap E) = m_e((A - b) \cap E + b) = m_e(A \cap (E + b))$

$m_e((A - b) \cap E^c) = m_e((A - b) \cap E^c + b) = m_e(A \cap (E + b)^c)$

$m_e(A - b) = m_e(A)$

Así que:

$$m_e(A \cap (E + b)) + m_e(A \cap (E + b)^c) \leq m_e(A)$$

Por lo tanto, $E + b$ es medible y como la medida exterior es invariante bajo traslaciones, se tiene:

$$\lambda\,(E + b) = m_e\,(E + b) = m_e\,(E) = \lambda\,(E)$$

$\blacksquare$

Proposición 14. *Sea $\mathcal{A}$ el conjunto formado por el vacío, todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ cuyo complemento sea finito (consideraremos al vacío como conjunto finito). Definamos la función $m :\mapsto [0, \infty)$ de la siguiente manera:*

$m(A) = 0$ si A es finito.

$m(A) = 1$ si el complemento de A es finito.

Entonces:

1. $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

2. m es una función finitamente aditiva, pero no $\sigma-$aditiva.

3. La $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}$ es el conjunto potencia de $\mathbb{N}$.

4. m se puede extender a una función finitamente aditiva $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto [0, 1]$, la cual no es $\sigma-$aditiva.

Demostración

1. $\mathbb{N}^c = \emptyset$; así que $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$.

El complemento de un conjunto finito tiene complemento finito y el complemento de un conjunto de complementlo finito es finito; así que, si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B$ es finito o tiene complemento finito; por lo tanto, $A \cup B \in \mathcal{A}$.

2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, y Si $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$m(A \cup B) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ y } B \text{ son finitos} \\ 1 & \text{si uno de los dos es finito y el otro tiene complemento finito} \end{cases}$

Así que, en cualquier caso:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Por lo tanto, m es finitamente aditiva.

Por otra parte, definiendo, para cada $n \in N$, $A_n = \{n\}$, entonces $A_n \in \mathcal{A}$ y $m(A_n) = 0$; pero:

$$m\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = m(\mathbb{N}) = 1$$

Así que m no es $\sigma-$aditiva.

3. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\{n\} \in \mathcal{A}$, así que, siendo $\mathbb{N}$ numerable, $\sigma(\mathcal{A})$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

4. Que m se puede extender a m^* se demostró en la sesión 2 utilizando el lema de Zorn. Además, siendo m^* finitamente aditiva, para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{N}$, se tiene:

$$m^*(A) \leq m^*(\mathbb{N}) = 1$$

Así que m^* toma valores en el intervalo $[0, 1]$.

Finalmente, que m^* no es $\sigma-$aditiva se deriva de que m no lo es.

$\blacksquare$